Διαφορικές εξισώσεις μαθ. 4ο   No.   Date 17-10-19

Η εξίσωση Bernoulli:

$$y' + q_r y = b y^r \quad (r \neq 0,1)$$

Δεν είναι γραμμική η εξίσωση

- κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $z = y^{1-r}$.

με $z' = y^{-r} \cdot y' (1-r)$

$$\underbrace{y^{-r} \cdot y'} + \underbrace{q_r y^{1-r}} = b$$

$$\frac{z'}{1-r} + q_r r = b$$

Αν βάλλουμε συνθήκη (αρχική τιμή) $y(x_0) = y_0$
τότε $z(x_0) = y^{1-r}(x_0)$
Έχουμε 1 λύση της εξίσωσης.

$$\begin{cases} y' + q_r y = b r^y & r \neq 0,1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\tilde{y} = y_1 - y_2 \quad // \quad \tilde{y}' + q_r \tilde{y} = b(y_1^r - y_2^r)$$

$$\tilde{y} + q_r - (y_1 + y_2) \cdot \tilde{y} = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ για σπίτι: Αν το $r = \sqrt{53}$ συμπεριφέρεται το ίδιο?

Βιβλίου.

Παράδειγμα $(x-2)y' + y = 7(x-2)\cdot y^{1/2}$, $y(3)=0$

$\boxed{2<x}$

$[r = 1/2]$ Επομένως $z = y^{1-1/2} = y^{1/2}$

$$z' = \frac{1}{2} y^{-1/2} y'$$

Η εξίσωση γράφεται $y' + \frac{1}{x-2} y = 7 y^{1/2}$

$$y' \cdot y^{-1/2} + \frac{1}{x-2} y^{1/2} = 7$$

$$2z' + \frac{1}{x-2} \cdot z = 7.$$

* Η αόριστη ολοκλήρωση μας δίνει

$$z = C\cdot(x-2)^{-1/2} + (x-2)^3.$$

* Στην ορισμένη ολοκλήρωση αρχίζω από 1 σημείο.
$z(3) = 0^{1/2} = \sqrt{0} = 0$. [αλλάζουν οι αρχικές τιμές
εφόσον έχω κάνει αλλαγή μεταβλητών.

$$z(x) = e^{-\int_3^x \frac{1}{2(s-2)} ds} \left[z(3) + \int_3^x \frac{7}{2} \cdot e^{\int_3^s \frac{1}{2(u-2)} du} ds \right]$$

Παράδειγμα $y' - \frac{1}{x} y' = -\frac{1}{2y}$ // $y(-1) = 2$.

Λύση:

$\boxed{x<0}$ $z = y^2 \rightsquigarrow$ $z(x) = x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right), x<0$

$$z(x) = C\cdot x^2 + x \Rightarrow \boxed{z(x) = x(x+1), x<0}$$

Πρέπει $x(x+1) \geq 0$

Το πεδίο ορισμού καθορίζει την αρχική συνθήκη.

$y^2(x) = x(cx+1)$, $x<0$

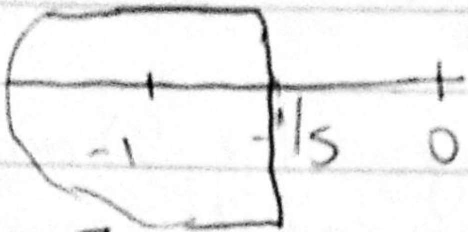
Όλες οι λύσεις → $y(x) = \pm\sqrt{x(cx+1)}$, $y(-1) = 2$

Αν $y(x) = \sqrt{x(cx+1)}$ τότε $2 = \sqrt{c-1}$

$2^2 = 4 - 1$

$\boxed{c = 3}$

$y(x) = \sqrt{x(5x+1)}$



-1 $\quad -1/5 \quad$ 0

Πεδίο ορισμού άρα $x < -1/5$.

$y(0) = 0$, $y(-1/5) = 0$.

Άσκηση 4i Σελίδα 36.

$xy' + y = -2x^2y^2$

Παρατηρούμε ότι $xy' + y = (xy)'$

κ' $(xy)' = -2(xy)^2$

Αν $u = xy$ $\quad u' = -2u^2$, $\dfrac{u'}{u^2} = -2$

Άσκηση-13

$$y(x)+1 = \int_0^x [t\,y(t)-1]\,y(t)\,dt \quad , x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

Οι λύσεις είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις είναι συνεχείς άρα και παραγωγίσιμες

$$y'(x) = [x\,y(x)-1]\,y(x), \; x\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Για $x=0$ (1) $\Rightarrow$ $y(0) = -1$ (3)

Η εξίσωση (1) συνεπάγεται την (2) αλλά η (2) δεν συνεπάγεται την (1) πρέπει να γνωρίζουμε την (3)

Απο (2),(3): $\left.\begin{array}{l} y' - xy^2 + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$

$$y(x) = \frac{1}{-2e^x + x + 1}.$$

~~[illegible]~~

Η εξίσωση Riccati $y' + ay + by^2 + d = 0$ $\alpha, b, d \in C$ (7)

Αν y_1 μια λύση τότε ο μετασχηματισμός $y = y_1 + \frac{1}{z}$ την μετατρέπει σε γραμμική.

Πράγματι:

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + \alpha\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + b\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + d = 0.$$

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + \alpha y_1 + \alpha\frac{1}{z} + b y_1^2 + b\,2y_1\cdot\frac{1}{z} + b\frac{1}{z^2} + d = 0.$$

$$\underline{-z' + \alpha z + 2b y_1 z + b = 0.}$$

όπου έχει y_1 φεύγει γιατί είναι λύση

ΑΣΚΗΣΗ 5 i) σελ 36.

$$y' - xy^2 - \frac{1}{x}y + x^3 = 0 \quad , y_1 = \alpha x + b \quad , x > 0.$$

$$a - x(a^2x^2 + b^2 + 2\alpha b x) - \frac{1}{x}(\alpha x + b) + x^3 = 0.$$

$$a - a^2x^3 - b^2x - 2abx^2 - a - \frac{b}{x} + x^3 = 0 \quad , x > 0.$$

$$(1-a^2)x^3 - 2abx^2 - b^2x - \frac{b}{x} = 0$$

↳ πολυώνυμο τρίτου βαθμού.
για να έχει άπειρες λύσεις ο συντελεστής πρέπει να μηδενίζεται $\alpha = \pm 1 \Rightarrow b = 0$.

Άρα έχω 2 συναρτήσεις $\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = -x \end{cases}$

Άσκηση 5 ιii) σελ. 36: $y' - y + e^{-x}y^2 = 4 \cdot e^x, \; y = k \cdot e^{\lambda x}$

$$k \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} - k \cdot e^{\lambda x} + e^{-x} k^2 \cdot e^{2\lambda x} = 4 \cdot e^x$$

$$k \cdot (\lambda - 1) \cdot e^{\lambda x} + k^2 \cdot e^{(2\lambda - 1)x} = 4 \cdot e^x, \; x \in \mathbb{R}$$

$\lambda = 1$

$k^2 \cdot e^x = 4 \cdot e^x$	$y_1(x) = 2 \cdot e^x$ (1)
$k^2 = 4$	$y_2(x) = -2 \cdot e^x$ (2)
$k = \pm 2$	

(1) $\Rightarrow y = 2 \cdot e^x + \frac{1}{2} \sim (!)$

(2) $\Rightarrow y = -2 \cdot e^x + \frac{1}{2} \sim ()$

(Να δούμε Α-20 απο το φυλλάδιο με τις λυμένες ασκήσεις

Η. ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ Ε=15°211

$y' = ay - by^2$ (1) , $y(0) = c > 0$ $\alpha, b > 0$, $c \geq 0$.

$x \geq 0$

$z = y^{1-r} = y^{1-2} = y^{-1} > z = -\frac{y}{y^2}$

(1) $\Rightarrow \frac{y'}{y^2} = a \cdot \frac{1}{y} - b$

$-z' - \alpha z - b$

$z' + \alpha z = b$

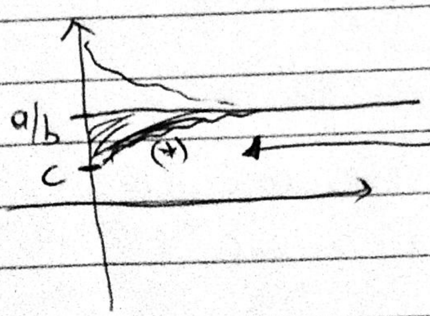
• $z(x) = e^{-\int_0^x \alpha ds} \cdot [z(0) + \int_0^x b e^{\int_0^s a du} ds$

$= e^{-ax} [\frac{1}{y(0)} + \int_0^x b e^{\alpha s} ds]$

$\Rightarrow z(x) = e^{-ax} \cdot [\frac{1}{c} + b \cdot \frac{e^{ax} - 1}{a}]$

$= e^{-ax} [\frac{1}{c} - \frac{b}{\alpha} + \frac{b}{\alpha} e^{ax}]$

$$y(x) = \frac{1}{e^{-\alpha x}[\frac{1}{c} - \frac{b}{\alpha}] + b/\alpha} \xrightarrow{\infty} a/b$$



Οι λύσεις της λογιστικής εξίσωσης έχουν την μορφή (*)

τείνουν στην σταθερότητα a/b.

*Οι λύσεις είναι διατεταγμένες

$y' = \alpha y - by^2 \Rightarrow y' = y(\alpha - by)$ (!)